• Dimostriamo che se $\lim_{k\to+\infty}(a_{k+1}-a_k)=L$ allora $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{k}=L$
Sia L finito. Per ipotesi sappiamo che $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \nu_\varepsilon : k>\nu_\varepsilon\ \Rightarrow\ L-\varepsilon<a_{k+1}-a_k<L+\varepsilon$. Per un qualsiasi intero $k>\nu_\varepsilon$ scriviamo $(a_{k+1}-a_k)+(a_{k+2}-a_{k+1})+(a_{k+3}-a_{k+2})+\ldots+(a_{k+n+1}-a_{k+n})=\sum_{j=0}^{n}(a_{k+j+1}-a_{k+j})=a_{k+n+1}-a_k$ e otteniamo $(n+1)(L-\varepsilon)<\sum_{j=0}^{n}(a_{k+j+1}-a_{k+j})<(n+1)(L+\varepsilon)$ ossia $(n+1)(L-\varepsilon)<a_{k+n+1}-a_k<(n+1)(L+\varepsilon)$. Ora dividiamo per $k+n+1$ ottenendo $\frac{n+1}{k+n+1}(L-\varepsilon)<\frac{a_{k+n+1}}{k+n+1}-\frac{a_k}{k+n+1}<\frac{n+1}{k+n+1}(L+\varepsilon)$ ossia
$\frac{n+1}{k+n+1}(L-\varepsilon)+\frac{a_k}{k+n+1}<\frac{a_{k+n+1}}{k+n+1}<\frac{n+1}{k+n+1}(L+\varepsilon)+\frac{a_k}{k+n+1}$
Per il Teorema del confronto si ha il risultato.

• Sia $L=+\infty$. Per ipotesi sappiamo che $\forall\ M>0\exists\ \nu_M : k>\nu_M\ \Rightarrow\ a_{k+1}-a_k>M$. Ripetendo il ragionamento di prima arriviamo a $a_{n+k+1}-a_k=\sum_{j=0}^{n}(a_{k+j+1}-a_{k+j})>(n+1)M$. Dividendo per $n+k+1$ si arriva a $\frac{a_{n+k+1}-a_k}{n+k+1}=\frac{\sum_{j=0}^{n}(a_{k+j+1}-a_{k+j})}{n+k+1}>\frac{n+1}{n+k+1}M$ e per $n\to+\infty$ si arriva al risultato.
L'ipotesi che $L=-\infty$ è del tutto analoga.

• Si può dare un esempio in cui $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ non esista ma esista $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}$ esiste. Basta prendere $a_n=(-1)^n$.

• Per l'altro limite $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ la dimostrazione è la seguente (ora supponiamo che $a_k>0$)
Sia $L=\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ e supponiamo che L è finito. Per definizione sappiamo che $k>k_\varepsilon\ \Rightarrow\ a_k(L-\varepsilon)<a_{k+1}<(L+\varepsilon)a_k$ da cui segue $a_{n-1}(L-\varepsilon)^2<a_{n+1}<(L+\varepsilon)^2a_{n-1}$ con $n-1>k_\varepsilon$ (si ricordi $a_k>0$) e quindi $a_{k_\varepsilon}(L-\varepsilon)^{n-k_\varepsilon}<a_n<(L+\varepsilon)^{n-k_\varepsilon}a_{k_\varepsilon}$ che è come dire $\lim_{k\to+\infty}a_k^{1/k}=L$ in quanto possiamo scrivere $a_{k_\varepsilon}^{1/n}(L-\varepsilon)^{1-\frac{k_\varepsilon}{n}}<a_n^{1/n}<(L+\varepsilon)^{1-\frac{k_\varepsilon}{n}}a_{k_\varepsilon}^{1/n}$.
Se $L-\varepsilon<0$ si scrive $0<a_n<(L+\varepsilon)^{n-k_\varepsilon}a_{k_\varepsilon}$ e il discorso continua a valere.
Se $L=+\infty$ allora $k>k_M\ \Rightarrow\ a_{k+1}>Ma_k$ e quindi $a_n>M^{n-k_M}a_{k_M}$ da cui $\lim_{k\to+\infty}a_k^{1/k}=+\infty$.
Naturalmente se esiste $\lim_{k\to+\infty}a_k^{1/k}$ non è detto che esista $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$. Si prenda la successione

$$a_k=\begin{cases}1 & k \text{ pari}\\ 1/2 & \text{dispari}\end{cases}$$

• Sapendo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ dimostriamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^a}=0$ per ogni $a>0$. Abbiamo $\frac{\ln n}{n^a}=\frac{1}{a}\frac{\ln(n^a)}{n^a}$. Sappiamo che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_\varepsilon :\ n>\nu_\varepsilon\ \Rightarrow\ \frac{\ln n}{n}<\varepsilon$. Se ora prendiamo tutti gli n per cui $n^a>\nu_\varepsilon$ ossia $n>[(\nu_\varepsilon)^a]$ abbiamo che $\frac{\ln n^a}{n^a}<\varepsilon$